

Aula 2 – Os princípios de Pascal e de Arquimedes

Objetivos

O aluno deverá ser capaz de:

- Estabelecer o Princípio de Pascal.
- Apresentar a prensa hidráulica.
- Estabelecer o Princípio dos vasos comunicantes.
- Estabelecer o Princípio de Arquimedes.
- Discutir dispositivos para medidas de pressão.

Princípio de Pascal e aplicações

A primeira coisa que faremos nesta aula será olhar um pouco mais de perto a equação 16 da Aula 1, a qual descreve a variação da pressão em um fluido, em função da profundidade. Observe que ela tem um termo que depende da profundidade e um termo constante igual a p_0 , a pressão na superfície do fluido. Uma consequência direta desta equação é que, se variarmos o valor de p_0 , esta variação de pressão será transmitida a todos os pontos do fluido. Esta propriedade dos fluidos é conhecida como Princípio de Pascal, pois foi enunciada pela primeira vez por Blaise Pascal, em 1663.

Este princípio aplicado por Pascal é a realização do que se conhece como prensa hidráulica. Você certamente já viu este dispositivo em funcionamento. É o conhecido macaco hidráulico, com o auxílio do qual uma pessoa pode, facilmente, erguer um automóvel com massa de centenas de quilogramas, em uma oficina mecânica. A Figura 2.1 mostra esquematicamente a prensa hidráulica, que consiste em um recipiente cheio de um fluido, com duas aberturas, por exemplo cilíndricas, com diâmetros diferentes. Nestas aberturas estão encaixados êmbolos leves bem adaptados, de tal forma que nenhuma quantidade de fluido possa passar entre a parede das aberturas e os êmbolos. Na Figura 2.1, as áreas dos êmbolos estão assinaladas como A_1 e A_2 , sendo obviamente $A_1 > A_2$. Imagine que os êmbolos estão no mesmo nível, e que, sobre o pistão de área A_1 , está posicionado um objeto pesado de massa M . Assim, para entender o funcionamento da prensa hidráulica,

devemos responder à pergunta: qual é a força F que devemos exercer sobre o êmbolo de área A_2 para que o objeto com massa M permaneça em equilíbrio?

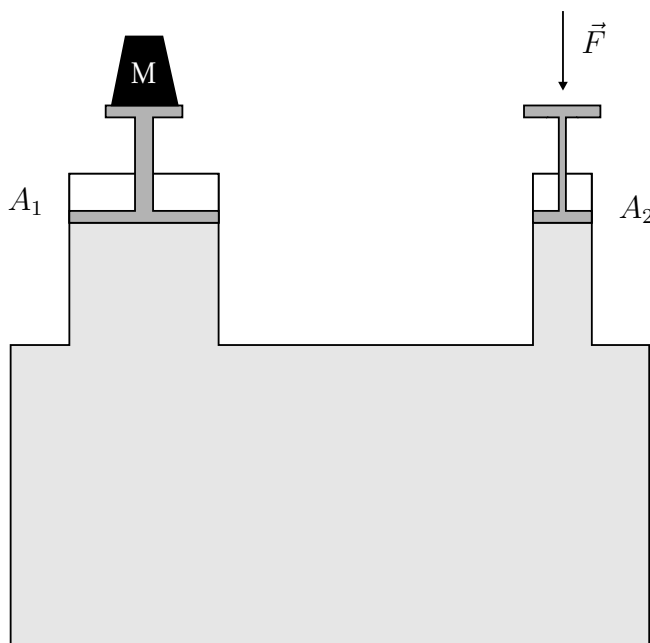


Figura 2.1: Esquema da prensa hidráulica.

Para responder a esta pergunta precisaremos analisar as forças que estão agindo sobre o objeto de massa M . Estas são o seu peso Mg e a força normal N do êmbolo sobre o objeto. Uma vez que a massa M está em equilíbrio $N = Mg$ e, como consequência, a pressão exercida sobre o fluido será igual a N/A_1 que por sua vez é igual a Mg/A_1 . Pelo Princípio de Pascal, esta pressão será transmitida à superfície do fluido em contato com o êmbolo menor. Ou seja:

$$F = \frac{A_2}{A_1} Mg, \quad (2.1)$$

onde F é a força que precisaremos exercer para manter o objeto de massa M em equilíbrio.

Exemplo 1

Uma prensa hidráulica possui um êmbolo maior com 10 cm de diâmetro e um menor com 2 cm de diâmetro. Calcule a força necessária para erguer um objeto com massa $M = 100\text{ kg}$ com o auxílio da prensa.

Solução:

A área de contato do êmbolo maior (diâmetro de 10 cm) é $A_1 = 0,031\text{ m}^2$ e a do êmbolo menor (diâmetro de 2 cm) é $A_2 = 0,00012\text{ m}^2$. A força necessária para equilibrar o objeto com massa igual a 100 kg será então igual a:

$$F = \frac{A_2}{A_1} Mg = \frac{\pi(\frac{2}{2})^2}{\pi(\frac{10}{2})^2} 980\text{ N} = \frac{1}{25} 980\text{ N} = 39,2\text{ N} . \quad (2.2)$$

Observe que a força necessária é quase trinta vezes menor que o peso do objeto, o que explica a facilidade com que se ergue um carro num posto de gasolina.

Uma outra consequência do que foi discutido na Aula 1, e que você provavelmente já conhece, é o Princípio dos vasos comunicantes. Este efeito está esquematizado na Figura 2.2, a qual mostra um vaso constituído por ramificações de formatos diferentes, sendo o seu fundo nivelado. Uma vez que todos os pontos do fundo do vaso estarão à mesma pressão, e que a pressão na superfície do fluido em cada ramificação é igual à pressão atmosférica, as alturas de fluido em cada ramificação serão iguais. Este fato é melhor explicado quando se expressa a pressão p_F do fundo do vaso em função da altura do líquido:

$$\begin{aligned} p_F &= p_0 + \rho g h_1 , \\ p_F &= p_0 + \rho g h_2 , \\ p_F &= p_0 + \rho g h_3 . \end{aligned} \quad (2.3)$$

Destas equações concluímos que $h_1 = h_2 = h_3$.

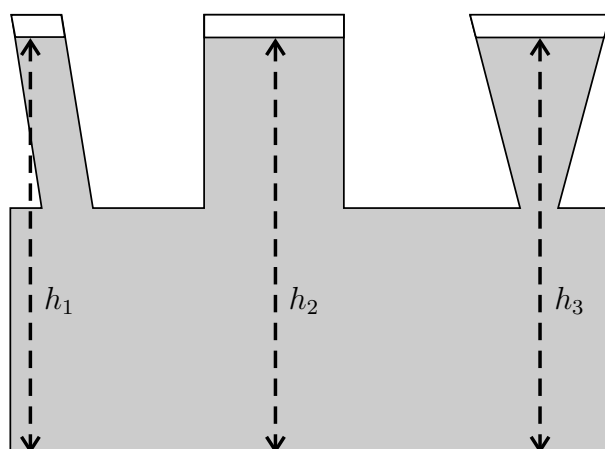


Figura 2.2: Esquema dos vasos comunicantes

Princípio de Arquimedes

Faz parte da experiência de qualquer pessoa a observação de que um objeto largado em um fluido pode ter três tipos de comportamento de equilíbrio: flutuar na superfície, ficar mergulhado em uma determinada profundidade ou estacionar no fundo do recipiente que contém o fluido. Outro fato de interesse é o comportamento dos peixes, ou o dos submarinos, que podem mudar de profundidade com uma relativa facilidade.

Para analisar fisicamente esta situação iremos usar o mesmo artifício utilizado para discutir a variação da pressão de um fluido com a profundidade. Vamos supor um paralelepípedo de um sólido com densidade ρ_S , com dimensões L_x , L_y e L_z . Imaginemos que este sólido está mergulhado em um fluido com densidade ρ , estando sua face superior a uma profundidade z . Vamos, então, analisar as forças exercidas pelo fluido sobre o sólido. Elas têm origem na pressão exercida pelo fluido sobre as faces do paralelepípedo. As forças provenientes da pressão sobre as faces laterais do sólido obviamente se anulam. Restam, então, as forças provenientes da pressão sobre as faces superior e inferior do sólido. Esta força é dada por:

$$F_z = [p(z) - p(z + L_z)]L_xL_y . \quad (2.4)$$

Mas, como vimos na aula anterior, $p(z)$ e $p(z + \Delta z)$ são dados por:

$$\begin{aligned} p(z) &= p_0 + \rho g z , \\ p(z + L_z) &= p_0 + \rho g (z + L_z) . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Portanto, a força resultante da pressão sobre as faces superior e inferior do sólido será dada por:

$$F_z = -\rho g L_x L_y L_z = -\rho g V_S , \quad (2.6)$$

onde V_S é o volume do sólido considerado. Portanto, o módulo desta força é igual ao peso de uma quantidade de fluido com volume igual à do sólido considerado. O sinal negativo indica que esta força aponta para cima, isto é, contrária ao sentido do eixo z adotado na Aula 1 (veja a Figura 1.7). É importante notar que esta força, que é denominada empuxo, depende apenas das propriedades do fluido no qual o sólido está mergulhado, e do volume do sólido. Esta lei foi, pela primeira vez, enunciada por Arquimedes, sendo por isso denominada *Princípio de Arquimedes*, o qual pode ser enunciado da seguinte forma: *um corpo mergulhado em um fluido sofre uma força*

para cima, cujo valor absoluto é igual ao peso do volume de fluido deslocado pelo corpo.

O estado de movimento de um sólido ao ser mergulhado em um fluido dependerá somente de sua densidade. Se sua densidade for maior que a densidade do fluido, o seu peso será então maior do que o empuxo, fazendo com que ele se movimente em direção ao fundo do recipiente que contém o fluido. Se a sua densidade for igual à do fluido, ele estará em equilíbrio, pois seu peso será igual ao empuxo. Se, caso contrário, sua densidade for menor que a do fluido, ele flutuará na superfície do fluido, com parte de seu volume acima da superfície.

Exemplo 2

Uma caixa cúbica com 50 cm de aresta e massa $M = 5,0\text{ kg}$ flutua numa piscina com água. Se derrarmos mercúrio (Hg) dentro da caixa, qual a altura máxima de Hg (com relação ao fundo da caixa) que pode ser transportada sem que a caixa afunde?

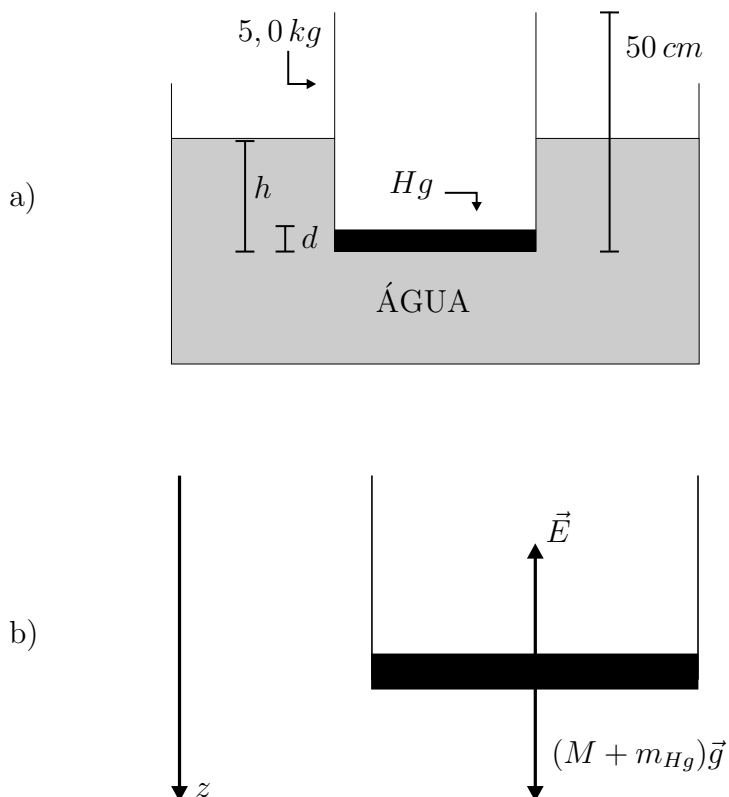


Figura 2.3: Exemplo 2. Aplicação do princípio de Arquimedes. a) Caixa com mercúrio (Hg) flutuando na água. b) Diagrama de forças atuando no sistema formado pela caixa com mercúrio.

1ª Solução:

Consideremos a caixa parcialmente cheia com uma massa m_{Hg} de Hg. Isolamos o sistema formado pela caixa com Hg, identificando todas as forças que atuam no sistema:

$$\sum F_z = (M + m_{Hg})g - E = 0 ,$$

onde $(M + m_{Hg})g$ é o peso total do sistema e E , o empuxo exercido pela água. Uma vez que o sistema se encontra em equilíbrio, temos que $\sum F_z = 0$. Por outro lado, pelo Princípio de Arquimedes, o empuxo é igual ao peso do volume de água deslocado, isto é,

$$E = \rho_a V g = \rho A h g ,$$

onde ρ_a é a densidade da água, A é a área da seção reta da caixa e h é a altura submersa da caixa. Podemos então relacionar h com a massa m_{Hg} colocada no interior da caixa através de:

$$(M + m_{Hg})g - \rho_a A h g = 0 \implies m_{Hg} = \rho_a A h - M .$$

Obviamente, a caixa afundará quando a altura submersa igualar-se à aresta da caixa, ou seja, $h = 50\text{ cm}$. Assim, a quantidade máxima de Hg que pode ser transportada é:

$$m_{Hg} = 1,0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \times (0,5\text{ m})^2 \times 0,5\text{ m} - 5,0\text{ kg} = 120\text{ kg} .$$

Conhecendo a densidade ρ_{Hg} do mercúrio, podemos calcular o volume ocupado por m_{Hg} :

$$V_{Hg} = \frac{m_{Hg}}{\rho_{Hg}} = \frac{120\text{ Kg}}{13,6 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3} = 8,82 \times 10^{-3} \text{ m}^3 .$$

Logo, a altura de Hg na caixa será

$$d = \frac{V_{Hg}}{A} = 35,3\text{ mm}$$

2ª Solução:

Mencionamos anteriormente que, devido ao Princípio de Arquimedes, a condição necessária para um objeto flutuar em um fluido é a de que a densidade do objeto seja menor que a do fluido. Assim sendo, podemos comparar a densidade média da caixa contendo Hg com a densidade da água.

Lembrando que o volume total da caixa é $V_T = AH$ e $m_{Hg} = \rho_{Hg} Ad$, a densidade média da porção submersa da caixa com Hg será:

$$\bar{\rho}_c = \frac{M + m_{Hg}}{V_T} = \frac{M}{V_T} + \frac{\rho_{Hg} d}{H},$$

onde $H = 0,5\text{ m}$ é a altura da caixa. A caixa irá afundar quando a altura de Hg atingir o valor d tal que $\bar{\rho}_c = \rho_a$. Assim, temos que

$$d = H \frac{\rho_a - (M/V)}{\rho_{Hg}} = 0,5\text{ m} \frac{1,0 \times 10^3\text{ kg/m}^3 - (5,0\text{ kg} / 0,125\text{ m}^3)}{13,6 \times 10^3\text{ kg/m}^3} = 35,3\text{ mm}$$

Medidas de pressão

A medida de pressão pode ser realizada tanto por técnicas hidrostáticas como por técnicas hidrodinâmicas. Nesta aula, trataremos apenas das técnicas hidrostáticas. As técnicas hidrodinâmicas baseiam-se nas leis de escoamento de um fluido que estudaremos mais tarde.

De maneira geral, chamamos *barômetro* o aparelho utilizado para a medição da pressão atmosférica. Um tipo rudimentar de barômetro de mercúrio foi inventado no século XVII pelo italiano Evangelista Torricelli. Um tubo de vidro fechado em uma das extremidades, e completamente cheio de mercúrio, é colocado de cabeça para baixo em um recipiente, também cheio de mercúrio, como mostra a Figura (2.4).

Utilizando um tubo suficientemente longo, observa-se que a coluna de mercúrio desce produzindo vácuo na parte mais alta do tubo. A pressão na região de vácuo é praticamente nula. Neste caso, podemos calcular a pressão atmosférica, lembrando que os pontos de um mesmo fluido, que se encontram à mesma altura, possuem a mesma pressão. Assim sendo, analisaremos os pontos A, B e C indicados na Figura (2.4), um sobre a superfície do mercúrio no recipiente (ponto A), outro à mesma altura no interior do tubo (ponto B), de maneira que $p_A = p_B$, e, ainda, outro na superfície do mercúrio no interior do tubo (ponto C). Uma vez que o ponto A está em contato com a atmosfera, p_A é igual à pressão atmosférica p_0 que queremos medir. Por outro lado, a pressão no ponto B pode ser calculada com a Equação (1.12) aplicada aos pontos B e C, lembrando-se de que $p_C = 0$ pois C encontra-se na interface entre o mercúrio e a região de vácuo. Assim, concluímos que $p_A = p_B = \rho gh$. Portanto, conhecendo-se a densidade do mercúrio e a aceleração da gravidade no local da medida, pode-se medir a altura h da coluna de mercúrio no tubo e obter o valor da pressão atmosférica no local. Por exemplo, ao nível do mar,

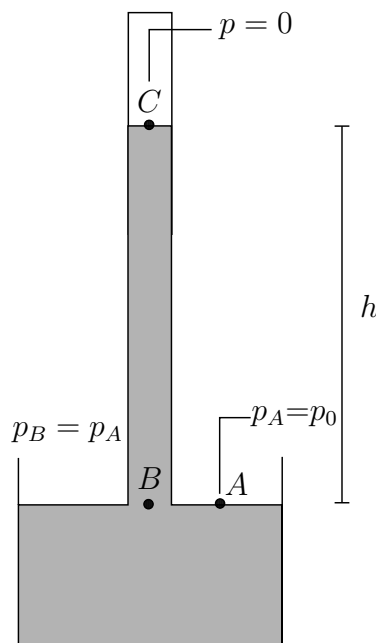


Figura 2.4: Barômetro de mercúrio.

a altura da coluna de mercúrio será de cerca de 760mm . Mais precisamente, 1 atmosfera (1 atm) corresponde a uma coluna de Hg de 760mm de altura a 0°C , sob gravidade $g = 9,80665\text{m/s}^2$. Substituindo a densidade do mercúrio a 0°C , $\rho_{\text{Hg}} = 1,35955 \times 10^4\text{kg/m}^3$, obtemos

$$1\text{atm} = (1,35955 \times 10^4\text{kg/m}^3)(9,80665\text{m/s}^2)(0,76\text{m}) = 1,01 \times 10^5\text{Pa}.$$

Baseado no barômetro de mercúrio definimos a unidade de pressão *torr* (em homenagem a Torricelli) como sendo a pressão correspondente a uma coluna de 1mm de Hg, ou seja,

$$1\text{torr} = (1,35955 \times 10^4\text{kg/m}^3)(9,80665\text{m/s}^2)(0,001\text{m}) = 133,326\text{Pa}.$$

Conforme dissemos na Aula 1, chamamos pressão manométrica a diferença entre a pressão medida e a pressão atmosférica. A *pressão absoluta* num ponto qualquer de um fluido é a soma da pressão manométrica com a pressão atmosférica, e, portanto, corresponde à pressão real no ponto em questão. O *manômetro* é um aparelho utilizado para medir-se pressões manométricas. Um tipo simples deste aparelho é o manômetro de tubo em U mostrado na Figura (2.5).

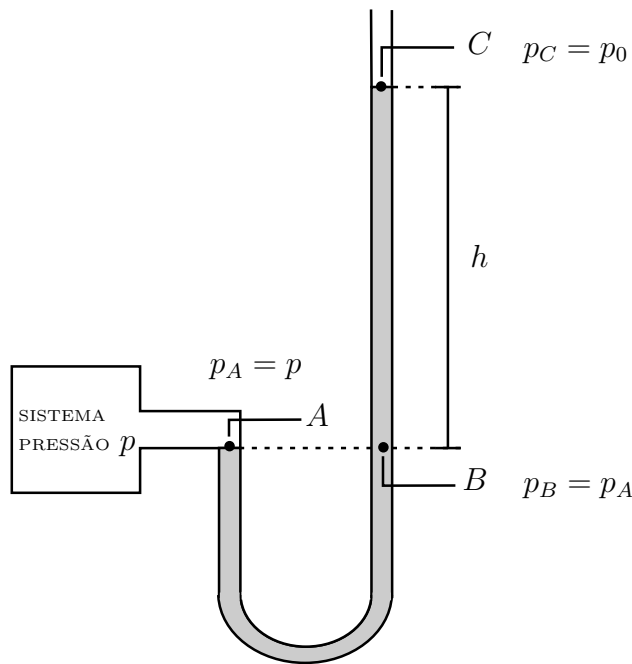


Figura 2.5: Manômetro de tubo em U.

Ele é formado por um tubo em forma de U, aberto em ambas as extremidades, contendo um fluido manométrico com densidade ρ . Uma das extremidades é colocada em contato com o sistema cuja pressão queremos medir, enquanto a outra extremidade está em contato com a atmosfera. Para calcularmos a pressão do sistema, utilizamos três pontos de referência: o ponto A de contato entre o sistema e o fluido manométrico, o ponto B localizado no outro ramo do tubo em U à mesma altura de A, e o ponto C na região de contato entre o fluido manométrico e a atmosfera. Como A e B estão à mesma altura, sobre o mesmo fluido, temos que $p_A = p_B$. Por outro lado, podemos aplicar a Equação (1.16) aos pontos B e C de maneira que $p_A = p_B = p_0 + \rho g h$. A pressão manométrica no ponto A é portanto

$$p_A - p_0 = \rho g h ,$$

ou seja, é proporcional à diferença de altura do fluido manométrico em cada ramo do manômetro. Assim, conhecendo-se ρ e g podemos obter a pressão manométrica medindo a altura h .

Resumo

Nesta aula, apresentamos dois princípios fundamentais da hidrostática. Os princípios de Pascal e de Arquimedes têm diversas aplicações práticas, sendo a base do funcionamento de todas as máquinas hidráulicas. O Princípio de Pascal nos diz que a variação de pressão em um ponto de um fluido estático é transmitida a todos os pontos do fluido. Este princípio fornece a base para o funcionamento da prensa hidráulica que permite que um objeto pesado seja erguido com uma força inferior ao seu peso. O Princípio de Arquimedes, em contrapartida, nos diz que um objeto submerso em um fluido sofre a ação de uma força vertical para cima, exercida pelo fluido, e cujo módulo é igual ao peso do volume de fluido deslocado. Nesta aula, vimos ainda os dispositivos básicos para medidas de pressão. Chamamos *barômetros* os dispositivos para medidas de pressão absoluta. Estudamos o funcionamento de um tipo rudimentar deste dispositivo que é o barômetro de mercúrio. As medidas de pressão relativa são realizadas por dispositivos chamados *manômetros*. Também estudamos um tipo comum deste aparelho que é o manômetro de tubo em U.

Exercícios

1. Um elevador hidráulico é constituído de dois pistões com tamanhos diferentes. O pistão menor tem $4,0\text{ cm}$ de diâmetro e o pistão maior possui $1,0\text{ m}$ de diâmetro. Um carro com $2,0 \times 10^3\text{ kg}$ é apoiado sobre o pistão maior. Que peso devemos colocar sobre o pistão menor para equilibrarmos o carro?
2. Um negociante de metais “preciosos” tenta vender uma jóia, supostamente feita de ouro, ao Sr. Arquimedes da Silva, que desconfia da peça e propõe um teste de legitimidade. Ele pesa a peça e conclui que a massa dela é de $39,0\text{ g}$. Em seguida, ele a submerge em um tubo contendo água, com $2,5\text{ cm}^2$ de área transversal. Sabendo que o nível da água no recipiente sobe $2,0\text{ mm}$, encontre a densidade da peça e diga se ela é legítima.
3. Uma plataforma flutua em água doce ($\rho = 0,998 \times 10^3\text{ kg/m}^3$), deslocando $5,0 \times 10^3\text{ kg}$ de água. Calcule o peso e o volume de água que a plataforma deslocaria se flutuasse em água salgada ($\rho = 1,024 \times 10^3\text{ kg/m}^3$)? O volume de água deslocada muda?

4. Um bloco de 500 kg possui a forma de um cubo com 50 cm de aresta. Este bloco é pendurado por um fio no interior de um recipiente cheio de água como mostra a figura 2.6. O objeto está submerso com sua face superior a 30 cm de profundidade.
- Calcule a força total $\vec{F}_1$ que atua na face superior do bloco.
 - Calcule a força total $\vec{F}_2$ que atua na face inferior do bloco.
 - Calcule a tração $\vec{T}$ no fio.
 - Calcule, utilizando o Princípio de Arquimedes, o empuxo $\vec{E}$ exercido pela água sobre o bloco.
 - Mostre que $E = F_2 - F_1$.
 - Considere agora que a face superior do bloco encontra-se a 50 cm de profundidade, e refaça os itens de (a) a (e). Que itens terão suas respostas modificadas?

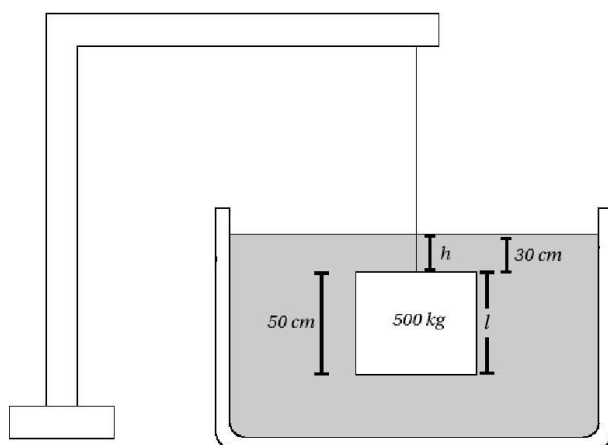


Figura 2.6: Exercício 4. O bloco de 500 kg , pendurado por um fio está submerso em um recipiente com água.

5. Suponha um barômetro que utilize água ($\rho_a = 1,0\text{ g/cm}^3$) no lugar de mercúrio. Sabendo que o valor da pressão atmosférica é de $1,01 \times 10^5\text{ Pa}$, calcule a altura da coluna de água no barômetro.

